Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

Tema A - 29/06/2021
Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. Per Calcolo 2 è permesso utilizzare un formulario su un foglio A4.
- Durante la prova sarà necessario rimanere al proprio posto, indossando sempre la mascherina. Non sarà possibile uscire durante la prova e prima del termine del termine della stessa.
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Solo al termine delle operazioni di consegna, si potrà abbandonare l'aula, una fila alla volta per evitare assembramenti, rispettando le indicazioni dei docenti.
- Siate ordinati nella risoluzione degli esercizi e scrivete il numero di pagina su ogni foglio.

Ulteriori indicazioni per chi fa l'esame in via telematica:

- La telecamera deve inquadrare sia il vostro volto che le vostre mani.
- Alla fine dell'esame fotografare SOLO i fogli di bella facendo attenzione di mettere a fuoco. Raccogliere le foto ordinate in un unico file pdf e caricarlo su moodle col nome: "CognomeNome.pdf".
- La sezione moodle per l'upload del compito rimarrà attiva fino a pochi minuti dopo la fine dell'esame. Se non è stato possibile caricare il compito in tempo bisogna contattare il docente e sarà richiesto di fare l'orale.
- Se avrete dei problemi di connessione, siete comunque invitati a caricare il vostro elaborato nella sezione di moodle. Vi sarà poi richiesto di sostenere l'orale.
- Potete lasciare la teleconferenza solo quando gli assistenti vi confermeranno l'avvenuta consegna in moodle.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $2y'' + 3y' - 2y = \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2}$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni di Cauchy e calcolarne il dominio:

$$y(0) = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2}}{6} \quad ; \quad y'(0) = \frac{17}{15}$$

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(\pi t)), & \text{se } t \in [0\ ,\ 3]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (3(t-3) - 3,\ \ 0), & \text{se } t \in\,]3\ ,\ 4] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 2$.

2.4 Sia $f(x, y) = \sqrt{\pi x^2 + \pi y^2}$. Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = 4\log(y^2 - x^2) - y^2$ (dove il logaritmo è in base naturale).

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

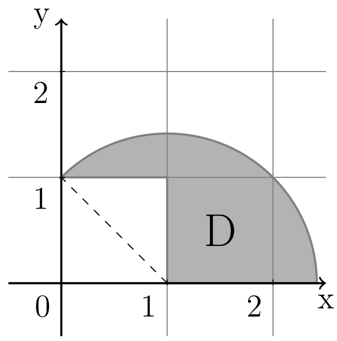
3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0, 1)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un archo di circonferenza di centro $(1, 0)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare

$$I_1 = \int\int_D dxdy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\,dxdy$$



Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione $2y'' + 3y' - 2y = \mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{-2}$

L'eq. caratteristica dell'eq. omogenea associata è (2 punti): $2\lambda^2 + 3\lambda - 2 = 0$ che ha soluzioni $\lambda = -2$ e $\lambda = +\frac{1}{2}$. Quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono:

$$z(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Per trovare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza, notando che e^{-2t} è soluzione dell'omogenea associata:

$$\bar{y}(t) = C_1 t\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Le cui derivate sono:

$$\bar{y}'(t) = -2C_1 t\mathrm{e}^{-2t} + C_1\mathrm{e}^{-2t} + 2C_2\mathrm{e}^{2t}$$

$$\bar{y}''(t) = 4C_1 t\mathrm{e}^{-2t} - 4C_1\mathrm{e}^{-2t} + 4C_2\mathrm{e}^{2t}$$

Sostituendo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -8C_1 + 3C_1 = 1 \\ 12C_2 = 2 \\ -2C_3 = \mathrm{e}^{-2} \end{cases} \implies C_1 = -\frac{1}{5}; C_2 = \frac{1}{5}; C_3 = -\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}$$

L'integrale generale quindi è:

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-2t} + B\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{5}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni di Cauchy e calcolarne il dominio:

$$y(0) = \frac{1 - 3\mathrm{e}^{-2}}{6} \quad ; \quad y'(0) = \frac{17}{15}$$

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} A + B + \frac{1}{6} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2} = \frac{1-3\mathrm{e}^{-2}}{6} \\ -2A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{17}{15} \end{cases} \implies A = -\frac{2}{5}; B = \frac{2}{5}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è:

$$y(t) = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-2t} + \frac{2}{5}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t} - \frac{1}{5}t\mathrm{e}^{-2t} + \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} - \frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

il cui dominio è $\mathbb{R}$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$ definita per parti

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) = (t\cos(\pi t), t\sin(\pi t))\,, & \text{se } t \in [0\;,\;3]\,; \\ \mathbf{r}_2(t) = (3(t-3)-3, \quad 0)\,, & \text{se } t \in]3\;,\;4] \end{cases}$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

Continuità, chiusura, semplicità e regolità si possono dedurre facilmente dal grafico del supporto.

$\mathbf{r}_1$ e $\mathbf{r}_2$ sono continue. Inoltre

$$\mathbf{r}_1(3) = (-3, 0) = \mathbf{r}_2(3)$$

quindi anche γ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1(0) = (0,0)$ e $\mathbf{r}(4) = \mathbf{r}_2(4) = (0,0)$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, conviene partire dal supporto dei due archi di curva: $\mathbf{r}_1$ è in forma polare con il raggio che cresce in $[0, 3[$, quindi è semplice. La curva $\mathbf{r}_2$ descrive un segmento orizzontale, da (-3,0) a (0,0), quindi è semplice.

Le due curve si intersecano in $(-1, 0)$, e si ha

$$\mathbf{r}_1(1) = (-1, 0) = \mathbf{r}_2(11/3) \implies t_1 = t_2$$

Si è trovato che prendendo $t_1 = 1$ e $t_2 = 11/3$ si ha $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, quindi la parametrizzazione NON è semplice.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}_1$,

$$\mathbf{r}_1'(t) = (\cos(\pi t) - t\pi\sin(\pi t), \sin(\pi t) + t\pi\cos(\pi t))$$

e a $\mathbf{r}_2$,

$$\mathbf{r}_2'(t) = (3, 0)$$

. Il secondo arco è regolare. Per il primo arco, la velocità di $\mathbf{r}_1$ è $\|\mathbf{r}_1'(t)\| = \sqrt{1 + \pi^2 t^2}$, che non si annulla mai, quindi anche il primo arco è regolare.

Per capire se $\mathbf{r}(t)$ è regolare, bisogna analizzare cosa succede in $t = 3$: la derivata prima passa da $\mathbf{r}_1'(3) = (-1, -3\pi)$ a $\mathbf{r}_2(3) = (3, 0)$, quindi il vettore tangente a γ non è definito in $t = 3$, e γ è regolare a tratti.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

$\mathbf{r}_1(t)$ è una curva in forma polare con raggio t. Il suo supporto è una spirale che parte dall'origine e cresce in senso antiorario.

$\mathbf{r}_2(t)$ è un segmento della retta orizzontale $y = 0$ percorso da $x = -3$ a $x = 0$.

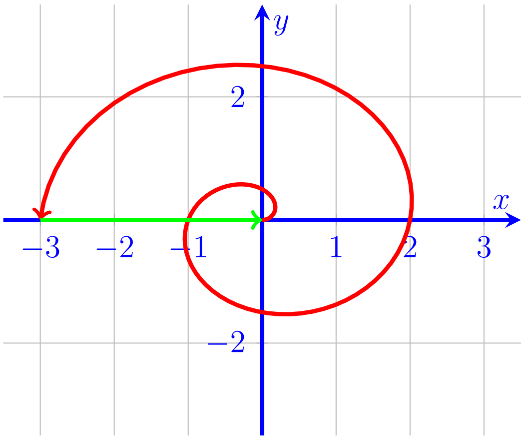


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 2$.

Si ha $\mathbf{r}(2) = (2, 0)$ e $\mathbf{r}'(\pi) = (1, 2\pi)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = 2 + (t-2) = t \\ y(t) = 2\pi(t-2) \end{cases}$$

L'equazione cartesiana è $y = 2\pi x - 4\pi$.

2.4 Sia $f(x, y) = \sqrt{\pi x^2 + \pi y^2}$. Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$ Il dominio di $f(x, y)$ è $\mathbb{R}^2$, quindi il supporto della curva è contenuto nel dominio.

$$\int_{\mathbf{r}_1} f(x,y)\, d\mathbf{s} = \int_0^3 f(t\cos(\pi t), t\sin(\pi t))\|\mathbf{r}_1'\|\, dt \tag{1}$$

$$= \int_0^3 \sqrt{\pi t^2}\sqrt{1+\pi^2 t^2}\, dt = \tag{2}$$

$$= [\frac{2\sqrt{\pi}}{6\pi^2}(1+\pi^2 t^2)^{3/2}]_0^3 = \frac{\sqrt{\pi}}{3\pi^2}(\sqrt[3]{(1+9\pi^2)} - 1) \tag{3}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x, y) = 4\log(y^2 - x^2) - y^2$ (dove il logaritmo è in base naturale).

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico delle sezioni $x = 0$ e $y = 0$.

Per il dominio dobbiamo imporre

$$y^2 - x^2 > 0 \implies |y| > |x| \implies y < -|x| \lor y > |x|$$

Il dominio di f è $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -|x \vee y > |x|\}$ che rappresenta la porzione di piano superiore al grafico di $y = |x|$ ed inferiore al grafico di $y = -|x|$.

La funzione è $\mathcal{C}^2(D_f)$ perché somma e composizione di funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ (anche $\mathcal{C}^\infty$).

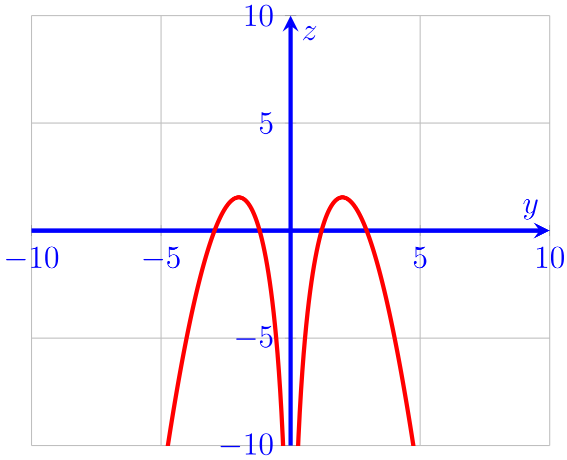


Figura 2: Sezione $x = 0$, $z = 4\log(y^2) - y^2$; la sezione $y = 0$ non ha punti.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella.

Il gradiente di f è:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\dfrac{8x}{y^2 - x^2} \\ \dfrac{8y}{y^2 - x^2} - 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{8x}{y^2 - x^2} \\ \dfrac{8y - 2y^3 + 2x^2 y}{y^2 - x^2} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ si ottiene dalla prima equazione $x = 0$. Sostituendo nella seconda equazione si ha la condizione:

$$8y - 2y^3 = 0$$

che è soddisfatta per $y = 0$, $y = \pm 2$. Si nota che il punto $(0, 0)$ non è accettabile perché al di fuori del dominio. Quindi si hanno due punti critici:

$$P_1 = (0, 2); P_2 = (0, -2)$$

Si usa il test della matrice Hessiana per caratterizzare tali punti. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} \dfrac{-8(y^2 - x^2) + 8x(-2x)}{(y^2 - x^2)^2} & \dfrac{16xy}{(y^2 - x^2)^2} \\ \dfrac{16xy}{(y^2 - x^2)^2} & \dfrac{8(y^2 - x^2) - 8y(2y)}{(y^2 - x^2)^2} - 2 \end{pmatrix}$$

- P_1:

$$H_f(0,2) = \begin{pmatrix} -\dfrac{32}{16} & 0 \\ 0 & \dfrac{32-64}{16} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

det $(H_f(0,2)) = 8 > 0$ e il termine è < 0. Quindi H_f è definitia negativa in P_1 e P_1 è punto di massimo locale.

- P_2:

$$H_f(0,-2) = \begin{pmatrix} -\dfrac{32}{16} & 0 \\ 0 & \dfrac{32-64}{16} - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

det $(H_f(0,-2)) = 8 > 0$ e il termine è < 0. Quindi H_f è definitia negativa in P_2 e P_2 è punto di massimo locale.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(0,1)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

$$\nabla f(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} \quad ; \quad \|\nabla f(0,1)\| = 6$$

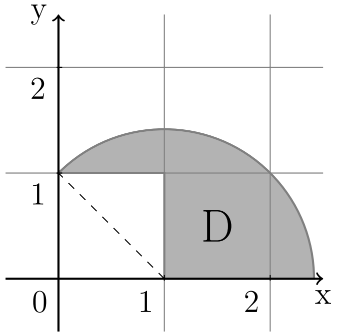
Quindi il versore di massima crescita in $(0,1)$ è:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lo sviluppo di Taylor del primo ordine in $(0,1)$ è

$$T_1(x,y) = -1 + 6(y-1)$$

Problema 4 (6 punti)



Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un archo di circonferenza di centro $(1,0)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare

$$I_1 = \int\int_D dxdy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\, dxdy$$

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \setminus D_2$ con:

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta) + 1, y = \rho\sin(\theta), 0 \le \theta \le \frac{3}{4}\pi, 0 \le \rho \le \sqrt{2}\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, -x+1 \le y \le 1\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy - \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_0^{3\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \rho\, d\rho\right) d\theta = \frac{3}{4}\pi\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_0^1\left(\int_{-x+1}^1 1\,dy\right) dx = \int_0^1 x\,dy = [\frac{x^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}$.
Per il calcolo del secondo integrale calcoliamo $\int\int_{D_1}(x-1)y\,dx\,dy$ e $\int\int_{D_2}(x-1)y\,dx\,dy$:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1}(x-1)y\,dx\,dy &= \int_0^{3\pi/4}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \sin(\theta)\cos(\theta)\rho^3\,d\rho\right) d\theta = \\ &= \left(\int_0^{3\pi/4}\frac{\sin(2\theta)}{2}\,d\theta\right)\left(\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,d\rho\right) = \\ &= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_0^{3\pi/4}\left[\rho^4/4\right]_0^{\sqrt{2}} = (0+\frac{1}{4})(1-0) = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2}(x-1)y\,dx\,dy &= \int_0^1\left(\int_{-x+1}^1 (x-1)y\,dy\right) dx = \\ &= \int_0^1\left((x-1)[\frac{y^2}{2}]_{-x+1}^1\right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{(x-1)}{2} - \frac{(x-1)(1-x)^2}{2}\,dx = \\ &= \left[\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(x-1)^4}{8}\right]_0^1 = \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{8}\end{aligned}$$

Quindi $\int\int_D (x-1)y\,dx\,dy = \frac{3}{8}$